

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учебно-методическое объединение по естественнонаучному образованию

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель Министра образования
Республики Беларусь

 В.А. Богуш

« 07 » 09 2015 г.

Регистрационный № ТД-0.533 /тип.

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Типовая учебная программа по учебной дисциплине для специальностей:

1-31 03 01 «Математика (по направлениям)»

(1-31 03 01-01 «Математика (научно-производственная деятельность)»,

1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)»,

1-31 03 01-03 «Математика (экономическая деятельность)»);

1-31 03 08 «Математика и информационные технологии

(по направлениям)»;

1-31 03 09 «Компьютерная математика и системный анализ»

СОГЛАСОВАНО

Председатель
Учебно-методического объединения
по естественнонаучному
образованию

 А.Л. Толстик

« 14 » 11 2014 г.

СОГЛАСОВАНО

Начальник Управления высшего
образования Министерства
образования Республики Беларусь

 С.И. Романюк

« 07 » 09 2015 г.

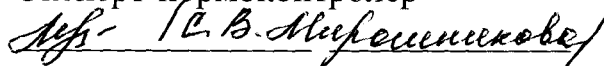
СОГЛАСОВАНО

Проректор по научно-методической
работе Государственного
учреждения образования
«Республиканский институт высшей
школы»

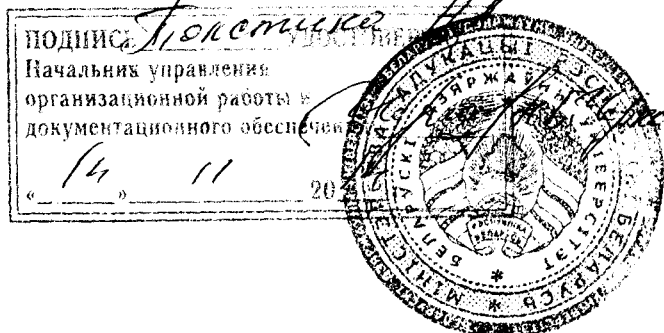
 И.В. Титович

« 13 » 08 2015 г.

Эксперт-нормоконтролер

 Е.В. МIRONЧИКОВА

« 11 » 06 2015 г.



СОСТАВИТЕЛИ:

Валерий Вацлавович Беняш-Кривец – заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Валерий Владимирович Курсов – доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра алгебры и геометрии учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка»;

Ирина Дмитриевна Супруненко – главный научный сотрудник Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси», доктор физико-математических наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета (протокол № 12 от 10 июня 2014 г.);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета (протокол № 6 от 20 июня 2014 г.);

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения по естественному образованию (протокол № 4 от 18 сентября 2014 г.).

Ответственный за редакцию: Валерий Вацлавович Беняш-Кривец
Ответственный за выпуск: Валерий Вацлавович Беняш-Кривец

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Алгебра и теория чисел» является базовой для преподавания большинства математических учебных дисциплин. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами, как «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики».

Элементы теории векторных пространств используются при изучении дисциплин «Аналитическая геометрия», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения», свойства комплексных чисел используются при изучении дисциплин «Теория функций комплексного переменного», «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики». Базовые понятия теории групп используются при изучении дисциплины «Аналитическая геометрия». Также при изучении многих дисциплин используются методы решения систем линейных уравнений и элементы теории матриц.

Основными методами изучения дисциплины «Алгебра и теория чисел» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала.

Практические навыки использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на практических занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов.

Цель дисциплины «Алгебра и теория чисел»: обучение студентов фундаментальным методам общей алгебры, линейной алгебры, теории чисел; знакомство с основными алгебраическими структурами — группами, кольцами и полями; создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики; формирование у студентов основ математического мышления; знакомство с методами математических доказательств; обучение алгоритмам решения конкретных математических задач; привитие студентам умения самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Алгебра и теория чисел»:

- ознакомить студентов с фундаментальными понятиями и методами линейной алгебры. Изучить матрицы и определители, методы решения систем линейных уравнений, теорию векторных пространств и линейных операторов, теорию квадратичных и билинейных форм;
- дать введение в задачи и методы теории групп, теории колец и полей, а также теории чисел;
- изучить комплексные числа и многочлены;
- развить у студентов аналитическое мышление и общую математическую культуру;
- привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

- основные понятия и результаты линейной алгебры, теории билинейных и квадратичных форм, теории групп, колец и полей;
- методы доказательств важнейших результатов, изучаемых в рамках учебной дисциплины «Алгебра и теория чисел»;
- алгоритмы решения задач по алгебре;

уметь:

- выполнять действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме, извлекать корни из комплексных чисел, применять формулу Муавра;
- вычислять определители;
- выполнять операции над матрицами;
- решать системы линейных уравнений;
- находить базис векторного пространства, суммы и пересечения подпространств, координаты вектора в заданном базисе, находить ранг матрицы и системы векторов;
- находить собственные значения и собственные векторы матрицы и линейного оператора;
- приводить квадратичную форму к каноническому виду;
- приводить ортогональный оператор к каноническому виду;
- находить ортонормированный базис, ортогональное дополнение к подпространству;
- определять, является ли данное подмножество подгруппой в группе, подкольцом или идеалом в кольце, подполем в поле;
- производить вычисления в факторгруппе, факторкольце;

владеть:

- основными навыками решения задач, связанных с линейной алгеброй, многочленами, комплексными числами, квадратичными и билинейными формами, группами, кольцами и полями;
- методами доказательств основных теорем, встречающихся при изучении учебной дисциплины «Алгебра и теория чисел»;
- навыками самообразования и способами использования аппарата алгебры и теории чисел для проведения математических и междисциплинарных исследований.

В результате изучения дисциплины «Алгебра» студент должен обладать следующими

академическими компетенциями:

- уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач;
- уметь работать самостоятельно;
- уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни;
- владеть системным и сравнительным анализом;
- владеть исследовательскими навыками;
- владеть междисциплинарным подходом при решении проблем;

- быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью);
- иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером;

- обладать навыками устной и письменной коммуникации;

социально-личностными компетенциями:

- быть способным к социальному взаимодействию;
- быть способным к критике и самокритике;
- обладать способностью к межличностным коммуникациям;
- уметь работать в команде;

профессиональными компетенциями:

– применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности и в областях знаний, непосредственно не связанных со сферой профессиональной деятельности;

– применять в производственной и научной деятельности основные законы и методы естественнонаучных дисциплин;

– владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации; применять современные методы проектирования информационных систем, использовать веб-сервисы, оформлять техническую документацию;

– заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий, в области эффективности решения производственных задач;

– использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований;

– осуществлять выбор оптимального варианта проведения научно-исследовательских работ;

– реализовывать инновационные проекты в профессиональной деятельности;

– передавать результат проведенных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;

– работать с научной, нормативно-справочной, специальной, технической и патентной литературой, в том числе с доступной в компьютерных сетях;

– готовить доклады, материалы к презентациям, публично представлять собственные и известные научные результаты;

– взаимодействовать со специалистами смежных профилей;

– понимать поставленную задачу, оценивать ее корректность;

– доказывать основные утверждения, выделять главные смысловые аспекты в доказательствах;

– самостоятельно разрабатывать алгоритмы решения и их анализировать;

– получать результат на основе анализа, его корректно формулировать, видеть следствия сформулированного результата.

На изучение учебной дисциплины «Алгебра и теория чисел» по специальности:

1-31 03 01-01 «Математика (научно-производственная деятельность)» отводится 338 часов, в том числе аудиторных — 212 часов (примерное распределение аудиторных часов по видам занятий: лекции — 106 часов, лабораторные занятия — 106 часов);

1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» отводится 348 часов, в том числе аудиторных — 212 часов (примерное распределение аудиторных часов по видам занятий: лекции — 106 часов, лабораторные занятия — 106 часов);

1-31 03 01-03 «Математика (экономическая деятельность)» отводится 386 часов, в том числе аудиторных — 212 часов (примерное распределение аудиторных часов по видам занятий: лекции — 106 часов, лабораторные занятия — 106 часов);

1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)» отводится 364 часа, в том числе аудиторных — 212 часов (примерное распределение аудиторных часов по видам занятий: лекции — 106 часов, практические занятия — 106 часов);

1-31 03 09 «Компьютерная математика и системный анализ» отводится 376 часов, в том числе аудиторных — 212 (примерное распределение аудиторных часов по видам занятий: лекции — 106 часов, практические занятия — 106 часов).

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ темы	Наименование тем	Распределение часов по видам занятий		
		Всего	Лекции	Практические занятия, лабораторные занятия ¹
1	2	3	4	5
1	Арифметика целых чисел. Сравнения	16	8	8
2	Алгебраическая операция, основные алгебраические структуры	6	3	3
3	Поле комплексных чисел	12	6	6
4	Матрицы и операции над ними	8	4	4
5	Перестановки и подстановки	6	3	3
6	Определители и их применение	12	6	6
7	Многочлены от одной и нескольких переменных	12	6	6
8	Векторные пространства	20	10	10
9	Системы линейных уравнений	12	6	6
10	Линейные отображения векторных пространств	16	8	8
11	Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Нормальные формы матриц	20	10	10
12	Билинейные и квадратичные формы	16	8	8
13	Евклидовы пространства	12	6	6
14	Линейные операторы евклидовых пространств	12	6	6
15	Введение в теорию групп	16	8	8
16	Введение в теорию колец и полей	16	8	8
	Всего по дисциплине	212	106	106

¹ Для специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)» предусматриваются лабораторные занятия, для специальностей 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)» и 1-31 03 09 «Компьютерная математика и системный анализ» – практические занятия.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Арифметика целых чисел. Сравнения

Делимость целых чисел и ее свойства. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида и запись наибольшего общего делителя (НОД) в виде целочисленной линейной комбинации. Взаимно простые числа, критерий взаимной простоты. Наименьшее общее кратное. Простые и составные числа, бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики. Сравнения и их свойства. Классы вычетов. Операции над классами вычетов. Теоретико-числовая функция Эйлера, ее мультипликативность. Теоремы Эйлера и Ферма. Решение линейных сравнений от одной неизвестной. Китайская теорема об остатках.

Тема 2. Алгебраическая операция, основные алгебраические структуры

Алгебраическая операция. Свойства алгебраической операции: коммутативность и ассоциативность. Нейтральный элемент и симметричные элементы множества относительно алгебраической операции. Теоремы о единственности нейтрального элемента и о единственности симметричного элемента относительно ассоциативной алгебраической операции. Определения группы, кольца, поля. Примеры. Кольцо классов вычетов. Обратимые классы вычетов. Конечные поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Тема 3. Поле комплексных чисел

Определение поля комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексных чисел. Комплексное сопряжение. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа, их свойства. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра и ее применение в вещественных вычислениях. Геометрическая интерпретация действий с комплексными числами. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы.

Тема 4. Матрицы и операции над ними

Понятие матрицы размера $m \times n$. Виды матриц: квадратная матрица, диагональная матрица, верхняя и нижняя треугольная матрица, единичная матрица, нулевая матрица, вектор-строка, вектор-столбец. Равенство матриц. Операции над матрицами: сложение и умножение матриц, умножение матрицы на скаляр, транспонирование. Свойства операций над матрицами. Многочлен от матрицы.

Тема 5. Перестановки и подстановки

Определение перестановок и подстановок, их число. Инверсии и порядки, четность перестановки. Транспозиции и циклы. Умножение подстановок и его свойства, симметрическая группа. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и транспозиций. Четность подстановки.

Тема 6. Определители и их применение

Определители второго и третьего порядков. Определитель квадратной матрицы произвольного порядка и его свойства. Определитель

транспонированной матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по строке и столбцу. Определитель треугольной матрицы. Определитель Вандермонда. Определитель произведения квадратных матриц. Обратная матрица: критерий существования и методы вычисления. Полная линейная группа. Теорема Крамера.

Тема 7. Многочлены от одной и нескольких переменных

Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Степень многочлена и ее свойства. Теорема о делении с остатком для многочленов. Наибольший общий делитель многочленов, алгоритм Евклида. Взаимно простые многочлены. Неприводимые многочлены. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители. Значение многочлена в точке, корень многочлена. Теорема Безу и следствия из нее. Схема Горнера. Производная многочлена и ее свойства. Кратность корня многочлена. Основная теорема алгебры. Каноническое разложение многочлена над полями комплексных и вещественных чисел. Многочлены от n переменных. Симметрические многочлены.

Тема 8. Векторные пространства

Определение и примеры. Система образующих векторного пространства, конечномерные пространства. Линейная независимость векторов. Теорема Штейница о замене. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса. Матрица перехода, преобразование координат вектора. Подпространство, его размерность. Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Сумма и пересечение подпространств, связь их размерностей. Прямая сумма подпространств.

Тема 9. Системы линейных уравнений

Матричная запись линейной системы. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Однородные системы, условие существования нетривиального решения. Фундаментальная система решений. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Задание подпространства векторного пространства системой линейных уравнений.

Тема 10. Линейные отображения векторных пространств

Линейное отображение, его ядро и образ. Ранг и дефект. Алгебраические действия над линейными отображениями: сумма, умножение на константу, композиция. Линейный оператор и его матрица. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Матрица композиции и суммы линейных операторов. Пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц. Условия обратимости оператора.

Тема 11. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Нормальные формы матриц

Инвариантное подпространство. Сужение оператора на инвариантное подпространство. Матрица оператора при наличии инвариантного подпространства, при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. Собственное число и собственный вектор оператора.

Характеристический многочлен оператора и матрицы. Теорема Гамильтона–Кэли. Оператор, имеющий диагональную матрицу в некотором базисе; признак диагонализуемости. Жорданова матрица. Теорема о существовании жордановой нормальной формы матрицы. Алгоритм приведения к жордановой нормальной форме. Нормальная форма Фробениуса.

Тема 12. Билинейные и квадратичные формы

Билинейная форма на векторном пространстве, ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса, ранг формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы, их матрицы. Операции над билинейными формами, пространство билинейных форм и его изоморфизм пространству квадратных матриц. Квадратичная форма и ее матрица, существование и единственность полярной билинейной формы. Канонический вид билинейной и квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Нормальный вид вещественной и комплексной квадратичных форм. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

Тема 13. Евклидовы пространства

Определение евклидова пространства. Длина вектора, угол между векторами. Неравенство Коши–Буняковского. Ортонормированные семейства векторов, ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение к подпространству. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

Тема 14. Линейные операторы евклидовых пространств

Сопряженный оператор, его существование и свойства. Инвариантные подпространства для сопряженных операторов. Ортогональные операторы, канонический вид их матриц. Самосопряженный оператор. Существование ортогонального преобразования, приводящего вещественную квадратичную форму к диагональному виду.

Тема 15. Введение в теорию групп

Определение группы, подгруппы, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм, автоморфизм. Порядок элемента группы. Циклические подгруппы. Циклические группы, их классификация. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Нормальная подгруппа. Факторгруппа. Основная теорема о гомоморфизмах групп. Прямое произведение групп.

Тема 16. Введение в теорию колец и полей

Определение кольца, подкольца, поля, подполя, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм колец, ядро гомоморфизма. Идеалы колец. Факторкольца. Основная теорема о гомоморфизмах для колец. Прямое произведение колец. Характеристика поля. Простые поля. Степень расширения, конечные расширения. Мультипликативность степени. Алгебраические и трансцендентные элементы. Простые расширения полей. Алгебраически замкнутые поля, алгебраическое замыкание.

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

- 1 Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 1. Мн.: Амалфея, 2001.
- 2 Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 2. Мн.: Амалфея, 2001.
- 3 Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. Мн.: Университетское, 1999.
- 4 Монахов В.С., Бузланов А.В. Алгебра и теория чисел: практикум. Минск: Изд. центр БГУ, 2007.
- 5 Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1974.
- 6 Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.
- 7 Баркович О.А. Алгебра: задания для практических занятий и самостоятельной работы. В 2 ч. Ч. 1. Введение в алгебру. Минск: БГПУ, 2005.
- 8 Баркович О.А. Алгебра: задания для практических занятий и самостоятельной работы. В 2 ч. Ч. 2. Линейная алгебра. Минск: БГПУ, 2006.
- 9 Кострикин А.И. Введение в алгебру. Т. 1—3. М.: Физ.—мат. литература, 2000-2001.
- 10 Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: МЦНМО, 1998.
- 11 Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965 (и более поздние издания).
- 12 Мальцев И.М. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
- 13 Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
- 14 Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал—пресс, 2001.
- 15 Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1976.

Дополнительная литература

- 16 Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.
- 17 Ван дер Варден Алгебра. М.: Наука, 1976.
- 18 Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1983.
- 19 Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1972.
- 20 Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
- 21 Сборник задач по алгебре. Под ред. А. И. Кострикина. М.: Наука, 1987.

Перечень рекомендуемых средств диагностики

Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, коллоквиумов, самостоятельных работ и опросов на практических занятиях.

Контроль освоения практических навыков осуществляется во время практических занятий в форме проверки домашних заданий, а также на контрольных работах и зачетах.

С целью текущего контроля предусматривается проведение контрольных работ (как правило, по одной на тему) и домашних работ по индивидуальным заданиям (как правило, по одной на лабораторное или практическое занятие). По итогам каждого семестра проводится зачет или экзамен.

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине

Самостоятельная работа студентов - это любая деятельность, связанная с воспитанием мышления будущего профессионала. В широком смысле под самостоятельной работой следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов как в учебной аудитории, так и вне аудитории, в контакте с преподавателем и в его отсутствие.

Самостоятельная работа реализуется:

1. Непосредственно в процессе аудиторных занятий - на лекциях, практических и семинарских занятиях, при выполнении лабораторных работ.
2. В контакте с преподавателем вне рамок расписания - на консультациях по учебным вопросам, в ходе творческих контактов, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.
3. В библиотеке, дома, в общежитии, на кафедре при выполнении студентом учебных и творческих задач.

При изучении дисциплины организация самостоятельной работы студентов должна представлять единство трех взаимосвязанных форм:

1. внеаудиторная самостоятельная работа;
2. аудиторная самостоятельная работа, которая осуществляется под непосредственным руководством преподавателя;
3. творческая, в том числе научно-исследовательская работа.

Виды внеаудиторной самостоятельной работы студентов разнообразны: подготовка и написание рефератов, докладов, очерков и других письменных работ на заданные темы.

Аудиторная самостоятельная работа может реализовываться при проведении практических занятий, семинаров, выполнении лабораторного практикума и во время чтения лекций.

При чтении лекционного курса непосредственно в аудитории необходимо контролировать усвоение материала основной массой студентов путем проведения экспресс-опросов по конкретным темам.

На практических и лабораторных занятиях различные виды самостоятельной работы студентов позволяют сделать процесс обучения более

интересным и поднять активность значительной части студентов в группе.

На практических занятиях нужно не менее 1 часа из двух (50% времени) отводить на самостоятельное решение задач. Практические занятия целесообразно строить следующим образом: 1. Вводное слово преподавателя (цели занятия, основные вопросы, которые должны быть рассмотрены). 2. Беглый опрос. 3. Решение 1-2 типовых задач. 4. Самостоятельное решение задач. 5. Разбор типовых ошибок при решении (в конце текущего занятия или в начале следующего).